Exercice 4 :

1) Représentation paramétrique de la droite (OA) :

Le vecteur $\overrightarrow{OA}(1;-1;3)$ (car $O(0;0;0)$ et $A(1;-1;3)$) est un vecteur directeur de (OA) ; En remarquant que cette droite passe par le point O donc sa représentation paramétrique est la suivante :

$$\boxed{(OA):\begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=3t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})}$$

2) Equation cartésienne du plan (Q) :

Puisque $(OA)\perp(Q)$ alors Le vecteur $\overrightarrow{OA}(1;-1;3)$ est normal à (Q) donc l'équation cartésienne de (Q) s'écrit sous la forme suivante :

$$x-y+3z+c=0$$

Or $A(1;-1;3)\in(Q)\Rightarrow x_A-y_A+3z_A+c=0$

$$\Rightarrow 1-(-1)+3\times 3+c=0\Rightarrow 11+c=0\Rightarrow c=-11$$

Donc : $\boxed{(Q):x-y+3z-11=0}$

3) Vérifier que : $(P)\ //\ (Q)$:

On a : $(P):x-y+3z=0$ donc $\vec{n}(1;-1;3)=\overrightarrow{OA}$ est un vecteur normal à (P) ainsi les deux plans ont le même vecteur normal ce qui signifie que : $(P)\ //\ (Q)$

4) a) Mq : $\Omega(a;b;c)$ le centre de (S) appartient à (OA) :

Puisque le plan (Q) est tangent à la sphère (S) en A ; alors le point A est le projeté orthogonal de Ω sur le plan (Q) ; ainsi Ω appartient à la droite passant par A est perpendiculaire au plan (Q) ; On sait que la droite (OA) vérifie ces conditions donc :

$$\boxed{\Omega\in(OA)}$$

b) Déduire que : $c=3a$; $b=-a$

On a : $\Omega(a;b;c)\in(OA)$ donc ces coordonnées vérifient la représentation paramétrique de (OA) ce qui donne :

$$\begin{cases} a=t \\ b=-t \\ c=3t \end{cases}\Rightarrow\boxed{\begin{cases} b=-a \\ c=3a \end{cases}}$$

c) Mq : $\Omega A^2-\Omega O^2=33$

On a le plan (Q) est tangent à la sphère (S) en A ; alors : $\Omega A=R$ avec R est le rayon de la sphère (S).

D'autre part le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de centre O (le point O est le projeté orthogonal de Ω sur le plan (P)) et de rayon $r=\sqrt{33}$ donc : $d=d(\Omega;(P))=OA$

Or : $r=\sqrt{R^2-d^2}\Rightarrow r^2=R^2-d^2\Rightarrow\sqrt{33}^2=\Omega A^2-\Omega O^2$

D'où : $\boxed{\Omega A^2-\Omega O^2=33}$

Déduire que : $a-b+3c=-11$:

On a $\Omega(a;b;c)$ et $A(1;-1;3)$ et $O(0;0;0)$ donc :

$$\Omega A^2-\Omega O^2=33$$
$$\Rightarrow[(a-1)^2+(b+1)^2+(c-3)^2]-[a^2+b^2+c^2]=33$$
$$\Rightarrow a^2-2a+1+b^2+2b+1+c^2-6c+9-a^2-b^2-c^2=33$$
$$\Rightarrow -2a+2b-6c=33-11\Rightarrow -2(a-b+3c)=22$$

Ainsi : $\boxed{a-b+3c=-11}$

d) Déduire les coordonnées de Ω :

D'après ce qui précède on a :

$$\begin{cases} b=-a \\ c=3a \\ a-b+3c=-11 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} b=-a \\ c=3a \\ a+a+9a=-11 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} b=-a \\ c=3a \\ 11a=-11 \end{cases}$$

Donc : $\begin{cases} b=1 \\ c=-3 \\ a=-1 \end{cases}$ ainsi : $\boxed{\Omega(-1;1;-3)}$

Mq : $R=2\sqrt{11}$:

On a : $R=\Omega A=\sqrt{(-1-1)^2+(1+1)^2+(-3-3)^2}=\sqrt{44}$

D'où : $\boxed{R=2\sqrt{11}}$

Exercice 5 :

1) Mq (S) est une sphère de centre $\Omega(0;2;-1)$ et de rayon $R=\sqrt{3}$:

On a : $(S):x^2+y^2+z^2-4y+2z+2=0$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-4y+z^2+2z+2=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2-4y+4-4+z^2+2z+1-1+2=0$$
$$\Leftrightarrow (x-0)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3=\sqrt{3}^2$$

Donc $\boxed{(S)\text{ est une sphère de centre }\Omega(0;2;-1)\text{ et de rayon }R=\sqrt{3}}$

2) Vq : $A(-1;1;0)\in(S)$:

On a :

$$x_A{}^2+y_A{}^2+z_A{}^2-4y_A+2z_A+2=1+1+0-4+0+2=0$$

Donc : $\boxed{A(-1;1;0)\in(S)}$

3) Equation cartésienne du plan (P) tangent à la sphère (S) en A :

Puisque le plan (P) est tangent à la sphère (S) en A ; alors $\overrightarrow{\Omega A}$ ou $\overrightarrow{A\Omega}$ est un vecteur normal à (P).

$\Omega(0;2;-1)$ et $A(-1;1;0)\Rightarrow\overrightarrow{A\Omega}(1;1;-1)$

Donc l'équation cartésienne de (P) s'écrit sous la forme suivante :

$$x+y-z+c=0$$

Or $A(-1;1;0)\in(P)\Rightarrow x_A+y_A-z_A+c=0$

$$\Rightarrow -1+1-0+c=0\Rightarrow c=0$$

Donc : $\boxed{(P):x+y-z=0}$

4) Equation cartésienne du plan (Q) :

Puisque $\vec{n}(1;1;1)\perp(Q)$ donc l'équation cartésienne de (Q) s'écrit sous la forme suivante : $x+y+z+c=0$

Or $B(1;3;-2)\in(Q)\Rightarrow x_B+y_B+z_B+c=0$

$$\Rightarrow 1+3-2+c=0\Rightarrow c=-2$$

Donc : $\boxed{(Q):x+y+z-2=0}$

5) Mq le plan (Q) coupe la sphère (S) suivant un cercle :

On a : $d(\Omega;(Q))=\frac{|x_\Omega+y_\Omega+z_\Omega-2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{|0+2-1-2|}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}<\sqrt{3}=R$

Donc le plan (Q) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C).

Déterminons le rayon et le centre de (C) :

Le centre est le projeté orthogonal de Ω sur (Q) donc ses coordonnées sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} x=t & (1) \\ y=2+t & (2) \\ z=-1+t & (3) \\ x+y+z-2=0 & (4) \end{cases}$$

Dans la relation (4) on remplace x et y et z par les relations (1) et (2) et (3) ainsi on obtient l'équation :

$$t+2+t-1+t-2=0\Rightarrow 3t-1=0\Rightarrow t=\frac{1}{3}$$

Ainsi : $x=\frac{1}{3}$ et $y=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$ et $z=-1+\frac{1}{3}=\frac{-2}{3}$

D'où : $\boxed{H\left(\frac{1}{3};\frac{7}{3};\frac{-2}{3}\right)}$ est le centre du cercle (C).

Le rayon est : $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{3-\frac{1}{3}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

6) Mq : la droite (D) coupe la sphère (S) en deux points différents :

Pour cela on résout un système qui contient la représentation paramétrique de la droite (D) et l'équation cartésienne de la sphère (S)

Qarray.tn-Aqra Bledi-Qarray.tn

FB: révision bac science 2020 TN

Scanned by DocumentScanner | Lufick